

膜のダイナミクスの構造保存型解法

Structure Conserving Dynamics of Membrane

宮崎・山崎研究室

Miyazaki - Yamazaki Laboratory

小野弘幸

Hiroyuki Ono

Recently, the large and highly accurate space structure has been desired more and more as the mission requirements have been higher and higher. Gossamer structure meets the request for enlargement of the structure, so that the research on gossamer structure is active now. However, gossamer structure has the disadvantage that it is difficult to conduct the ground test because it is quite lightweight and flexible. Therefore, it is necessary to predict its dynamic behavior in space by numerical simulation. Generally, the equation of motion of gossamer structure is extremely stiff differential-algebraic equation, so that the numerical instability can easily occur. Thus the simulation method must be highly stable. This paper proposes the Energy Momentum Method (EMM) for the simulation of the motion of gossamer structure to avoid the instability. The membrane element is formulated as an example of the EMM, and numerical results on isotropic membrane are presented. The results show that the EMM is suitable for highly flexible and lightweight structure such as membrane.

Nomenclature

\hat{a}	外積計算の歪対称行列.
Δa	$a(t_{n+1}) - a(t_n)$ であり時間ステップ幅における増分.
\bar{a}	$[a(t_{n+1}) + a(t_n)] / 2$ であり時間ステップ幅における平均.
$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial a}}$	離散微分であり $\Delta f(a) = \widetilde{\frac{\partial f}{\partial a}} \Delta a$ を満たす.
\mathcal{B}	物体をまたは要素を表す.
C^{ijkl}	弾性テンソル成分.
C	弾性テンソル.
e_i	物体座標系の正規直交基底ベクトル. $i = 1, 2, 3$
E_{ij}	Green-Lagrange 歪テンソル成分.
E	Green-Lagrange 歪ベクトル.
J_{pq}	回転節点 p, q に関する慣性テンソル.
M_{mn}	並進節点 m, n に関する質量.
θ^p	回転節点 p に関する回転角.
n^p	回転節点 p に関する回転方向.
θ_δ^p	回転節点 p に関する R^p の変分に関するベクトル. $\delta R^p = R^p \theta_\delta^p$
θ^p	回転節点 p に関する仮想変位ベクトル.
Θ^p	回転節点 p に関する仮想変位ベクトル. $\Delta \Theta^p = \bar{R}^p \Delta \theta^p$ の関係がある.
R^p	回転節点 p に関する姿勢を表す正規直交基底マトリクス.
S_{ij}	第2Piola-Kilchhoff 応力テンソル成分.
S	第2Piola-Kilchhoff 応力ベクトル.
V	物体または要素の体積.
ω^q	回転節点 p の角速度.
x^m	並進節点 m の位置ベクトル.
Y^i	物体埋め込み直交座標系の座標. $i = 1, 2, 3$

- 1) 大面積, 超軽量構造(ソーラーセイル, 膜面アンテナ)
- 2) 大型, 高比剛性構造(観測用進展アンテナ/マスト, 太陽電池パネル, サンシェード, スターシェード)
- 3) 大口径, 超高精度構造(高周波天文アンテナ, 支持構造)

これらのうち, 1)と2)はゴッサマー構造で実現可能である. ゴッサマー構造は収納性に優れ, 軽量であるため将来の大型宇宙建造物の構造様式として期待されている. その代表的な例がソーラーセイルであり, 日本が2010年に世界で始めてソーラーセイル IKAROS による惑星間航行を成功して以来, 世界的にも研究が活発になっている. また, 日本では IKAROS の成功を受け, 50m 級のソーラーセイルによる木星トロヤ群の小惑星探査ミッションが検討されている.

さらに将来に目を向けると, 大型宇宙建造物として, 数百~数千 km 規模の SSPS(Space Solar Power System)が古くから構想されている. これにはその巨大さゆえ比剛性が極めて高い構造が要求されており, ゴッサマー建造物と呼ぶべきものである.

以上のように, ゴッサマー構造は将来の大型建造物の構造様式として期待されている. しかし, その柔軟性, 軽量性ゆえに外乱の影響を受けやすく, 大気や重力が存在する地上では試験が困難である. そのため, 数値計算による挙動の予測が必要であり, その際には開発に間に合うだけの計算速度が必要となる. しかし, ゴッサマー構造の運動方程式は極めて固く, 数値不安定を起こしやすい. さらに, その柔軟さゆえ高い非線形性を有し, 計算精度を保証するのが難しい.

本研究ではこれらの課題を解決するため, エネルギー, 運動量, 角運動量の保存を満たす構造保存型解法による数値計算を提案し, 数値計算により妥当性を検証することを目的とする.

2. 理論

2.1. 非線形有限要素動解析

一般に有限要素動解析において物体の位置は,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_G + Y^i \boldsymbol{e}_i \quad (1)$$

1. 序論

近年, 技術の向上に伴い研究機関などではミッションが高効率化しており, 宇宙建造物に関しては大型化や高精度化が著しい. またその様な要求を満足するために次のような研究がなされている.

と書ける. この時, \mathbf{x}_G は質量中心の位置ベクトルである. 図で示すと Fig.1 のようになる.

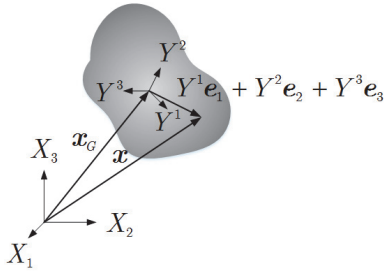


Fig. 1 Expression of position

本研究ではアイソパラメトリック要素を用いることとし, 要素の各変数は補間関数 $N_m N_p$ を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= N_m \mathbf{x}^m, \quad \dot{\mathbf{x}} = N_m \dot{\mathbf{x}}^m \\ \mathbf{e}_i &= N_p \mathbf{e}_i^p, \quad \boldsymbol{\omega} = N_p \boldsymbol{\omega}^p \end{aligned} \quad (2)$$

と近似する. このとき, 物体の持つ運動エネルギー T , 運動量 \mathbf{P} , 角運動量 \mathbf{L} , 力学的エネルギー Π は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_{mm} \dot{\mathbf{x}}^m \cdot \dot{\mathbf{x}}^m + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^p \cdot \mathbf{J}_{pq} \boldsymbol{\omega}^q \\ \mathbf{P} &= M_{mm} \dot{\mathbf{x}}^m \\ \mathbf{L} &= \mathbf{x}^m \times M_{mm} \dot{\mathbf{x}}^m + \mathbf{R}^p \mathbf{J}_{pq} \boldsymbol{\omega}^p \\ \Pi &= T + U^m \end{aligned} \quad (3)$$

また, 運動方程式の結果を示せば以下ようになる.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial \mathbf{q}} \right)^T (\mathbf{f}_m^x - \mathbf{F}_m^x) + (\mathbf{B}^p)^T (\mathbf{f}_p^\theta - \mathbf{F}_p^\theta) = \mathbf{0} \quad (4)$$

ただし, $\delta \mathbf{q}$ は配位ベクトル \mathbf{q} の変分である. また, \mathbf{B}^p は

$$\mathbf{B}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{A}^p \quad \text{with} \quad \mathbf{A}^p = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\theta}_\delta^p}{\delta t} \quad (5)$$

を満たすマトリクスである. さらに, $\mathbf{f}_m^x, \mathbf{F}_m^x$ は並進節点 m に関する内力および外力, $\mathbf{f}_p^\theta, \mathbf{F}_p^\theta$ は回転節点 p に関する内力および外力によるモーメントである. また, $\mathbf{f}_m^x, \mathbf{f}_p^\theta$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m^x &= M_{mm} \frac{d\dot{\mathbf{x}}^m}{dt} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}^m} \right)^T \\ \mathbf{f}_p^\theta &= \frac{d(\mathbf{R}^p \mathbf{J}_{pq} \boldsymbol{\omega}^q)}{dt} + \mathbf{e}_i^p \times \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{e}_i^p} \right)^T \end{aligned} \quad (6)$$

である. さらに, 以下のようなエネルギー, 運動量, 角運動量原理が成立つ.

$$\dot{\Pi} = \varpi, \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_m^x, \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{x}^m \times \mathbf{F}_m^x + \mathbf{F}_p^\theta \quad (7)$$

ここで, ϖ は外部仕事の仕事率である^[1].

2.2. EMM による定式化

2.1節では運動方程式を示し, 力学的エネルギーの時間変化が仕事率に等しいこと, 運動量の時間変化が外力の和に等しいこと, 角運動量の和が外力によるモーメントの和に等しいことを示した. しかし, ここで“等しい”とは瞬間的な場合であり, 任意の時間幅において満たすものではない^[1]. そこで本研究では次式を満たす運動方程式を示す.

$$\Delta \Pi = \Delta W, \quad \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \tilde{\mathbf{F}}_m^x, \quad \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \tilde{\mathbf{x}}^m \times \tilde{\mathbf{F}}_m^x + \tilde{\mathbf{F}}_p^\theta \quad (8)$$

ここで, $\Delta W, \tilde{\mathbf{F}}_m^x, \tilde{\mathbf{F}}_p^\theta$ はそれぞれ, 外部仕事増分, 並進節点 m に関する離散化された外力, 回転節点 p に関する離散化された外力によるモーメントである. 式(8)に示した増分関係での三原理を満たすように運動方程式を修正すると,

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^m}{\partial \mathbf{q}} \right)^T (\tilde{\mathbf{f}}_m^x - \tilde{\mathbf{F}}_m^x) + \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\theta}}^p}{\partial \mathbf{q}} \right)^T (\tilde{\mathbf{f}}_p^\theta - \tilde{\mathbf{F}}_p^\theta) = \mathbf{0} \quad (9)$$

となる. ここで, $\tilde{\mathbf{f}}_m^x, \tilde{\mathbf{f}}_p^\theta$ は離散化された内力および内力によるモーメントであり, 具体的には次節で述べる. また, この離散化において次の時間積分則を用いる.

$$\dot{\mathbf{x}}^m = \frac{\Delta \mathbf{x}^m}{\Delta t}, \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}^p}{\Delta t} \quad (10)$$

2.3. EMM による要素の定式化

2.3.1. 剛体要素

剛体要素であれば, 内部エネルギーは存在しないため, 離散化された内力は以下のように書ける^{[1][2]}.

$$\tilde{\mathbf{f}}_m^x = M \frac{\Delta \dot{\mathbf{x}}}{\Delta t}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_p^\theta = \frac{\Delta (\mathbf{R} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega})}{\Delta t} \quad (11)$$

ここで, $M, \mathbf{J}, \mathbf{R}$ はそれぞれ, 質量, 感性テンソル, 基底マトリクスである. これを微分することで, 剛体要素の剛性マトリクスを計算できる.

2.3.2. 異方性膜要素

平面応力問題であるので構成則は以下のように定める^{[1][3]}.

$$\mathbf{S}^{ij} = C^{ijkl} E_{ij} \quad (12)$$

ただし,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ 2S^{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1112} \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2212} \\ C^{1211} & C^{1222} & C^{1221} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$$

この時, 構成則より歪エネルギーは以下のように書ける.

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} dV \quad (14)$$

一般に, 膜要素は引張時と圧縮時で剛性が異なるので本研究では, taut, wrinkle, slack の状態に分け, 応力を修正する^{[1][3]}. 以下, 結果を述べる.

膜が taut であるための条件は以下の不等式のように2つの主応力がともに0以上であることである.

$$S^{11} S^{22} - S^{12} S^{12} \geq 0 \quad \& \quad S^{11} G_{11} + S^{22} G_{22} + 2S^{12} G_{12} \geq 0 \quad (15)$$

この条件が満たされない場合 wrinkle が生じ, その角度 θ は次式で求められる.

$$\mathbf{E} \cdot [\mathbf{U}^1 \times (\mathbf{D} \mathbf{U}_2)] = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{U}^1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta \\ -\sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 \mathbf{D} は撓性マトリクスであり、弾性マトリクスの逆マトリクスである。式(16)より、 θ が2つ求まるので、その小さい方を用いて弾性マトリクスを修正する。

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \frac{1-\eta_1}{\mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{C}\mathbf{U}^1} (\mathbf{C}\mathbf{U}^1) \otimes (\mathbf{C}\mathbf{U}^1) \quad (18)$$

ここで、 η_1 は応力低減係数である。修正された弾性マトリクスより、応力ベクトル及び歪エネルギー密度 π は以下のようになる。

$$\mathbf{S}_w = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{E}, \quad \pi = \frac{1}{2} \mathbf{S}_w \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{E} \quad (19)$$

次に、slack となる場合は以下の条件を満たす時である。

$$S_w^{11} S_w^{22} - S_w^{12} S_w^{21} > 0 \text{ \& } S_w^{11} G_{11} + S_w^{22} G_{22} + 2S_w^{12} G_{12} < 0 \quad (20)$$

この時、slack angle θ_s は、

$$\mathbf{S}_w \cdot [(\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{V}^1) \times \mathbf{V}_2] = 0, \quad \mathbf{V}^1 = \mathbf{U}^1(\theta_s), \mathbf{V}_2 = \mathbf{U}_2(\theta_s) \quad (21)$$

より求められ、弾性マトリクスは

$$\tilde{\mathbf{C}}_s = \tilde{\mathbf{C}} - \frac{1-\eta_2}{\mathbf{V}^1 \cdot \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{V}^1} (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{V}^1) \otimes (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{V}^1) \quad (22)$$

と書け、 η_2 は応力低減係数である。修正された応力ベクトルと歪エネルギー密度 π は

$$\mathbf{S}_s = \tilde{\mathbf{C}}_s \mathbf{E}, \quad \pi = \frac{1}{2} \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_s \mathbf{E} \quad (23)$$

となる。

2.3.3. 等方性膜要素

等方性膜要素は、wrinkle 方向は主応力方向と一致するので、応力状態の判定は簡単になる^[13]。

主歪 γ は Green-Lagrange 歪の固有値であるので、以下のよう求められる。

$$\gamma_1 = \frac{A-B}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{A+B}{2} \quad (24)$$

ただし

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$A = G^1 \varepsilon_1 + G^2 \varepsilon_2 + G^3 \varepsilon_3, \quad B = \sqrt{A^2 + DH}$$

$$D = \varepsilon_3 \varepsilon_3 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad H = G^1 G^2 - G^3 G^3$$

この時、主歪と主応力の構成則は以下のように書ける

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\gamma} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - a_1 a_2 \nu^2} \begin{bmatrix} a_1 & a_1 a_2 \nu \\ a_1 a_2 \nu & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

ただし、パラメータ a_1, a_2 は以下のような条件で決定する。
すなわち

$$f_1 = \gamma_1 + \nu \gamma_2, \quad f_2 = \gamma_2 + a_1 \nu \gamma_1 \quad (27)$$

として、

$$\begin{aligned} f_1 &\geq 0 && \Rightarrow \text{taut} & (a_1, a_2) &= (1, 1) \\ f_1 < 0 \text{ \& } f_2 > 0 && \Rightarrow \text{wrinkle} & (a_1, a_2) &= (\alpha_1, 1) \\ f_1 < 0 \text{ \& } f_2 &\leq 0 && \Rightarrow \text{slack} & (a_1, a_2) &= (\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned} \quad (28)$$

である。ここで、 α_1, α_2 は剛性低減係数である。以上より歪エネルギーは

$$\Pi = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} dV \quad (29)$$

と書ける。なお、剛性低減係数と応力低減係数は以下のような関係がある。

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{1-\alpha_1 \nu^2}} \alpha_1, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{1-\alpha_1 \nu^2}{1-\alpha_1 \alpha_2 \nu^2}} \alpha_1 \quad (30)$$

以上により、膜要素の等価節点力は以下のように記述できる。

$$\tilde{\mathbf{f}}_m^x = M_{mm} \frac{\Delta \dot{\mathbf{x}}^m}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}^m} \right)^T \quad (31)$$

ここで、歪エネルギーによる内力は

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}^m} \right)^T = \int_{\mathcal{R}} \left[\tau_m^a \left(\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \mathbf{x}^m} \right)^T + \frac{\Phi}{\Delta \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}^m} \right)^T \right] d\Omega \quad (32)$$

となる。ただし、

$$\tau_m^a = \frac{1}{2} \left[\frac{3\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\alpha\beta} + \tilde{\Gamma}_{(n)}^{\alpha\beta}}{4} \gamma_{\beta(n+1)} + \frac{\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\alpha\beta} + 3\tilde{\Gamma}_{(n)}^{\alpha\beta}}{4} \gamma_{\beta(n)} \right] \quad (33)$$

$$\Phi = \frac{\Delta \tilde{\Gamma}^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}^\alpha \tilde{\gamma}^\beta}{2}$$

であり、膜の状態によって

case1:(wrinkle-wrinkle) or (slack-slack)

$$\Gamma_{(n+1)} = \Gamma_{(n)}, \quad \Phi = 0$$

case2:;(taut-wrinkle) or (taut-slack)

$$\psi = \gamma_1 + \nu \gamma_2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}^m} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial \mathbf{x}^m} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial \mathbf{x}^m} \quad (34)$$

case3:(wrinkle-slack)

$$\psi = \gamma_2 + \alpha_1 \nu \gamma_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}^m} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \mathbf{x}^m} + \alpha_1 \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial \mathbf{x}^m}$$

とする^[13]。

3. 計算結果

本節では、等方性膜要素の計算結果を示す。コードは Matlab で作成した。また、計算モデルは以下に示すように9節点4要素のモデルである。要素の大きさは1辺1[m]の正方形であり、モデル全体としては1辺2[m]の膜となる。

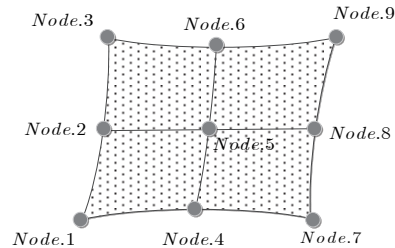


Fig. 2 The simple membrane model

計算の条件を以下の Table.1 に示す.

Table. 1 Analysis condition

時間ステップ幅 Δt	1.0×10^{-4}	[s]
角速度 ω (Node.5)	0.1π	[rad/s]
ヤング率 E	3.0×10^9	[Pa]
密度 ρ	1.25×10^3	[kg/m ³]
厚さ h	1.25×10^{-5}	[m]
要素1辺の長さ	1	[m]
剛性低減係数 α	1.0×10^{-4}	[-]
並進節点増分の許容残差	1.0×10^{-12}	[-]

計算時のモデルの運動は、Node.5 を中心とした回転運動である。計算結果の妥当性を示すため Node.1 と Node.5 がどのような運動となったかを示す。

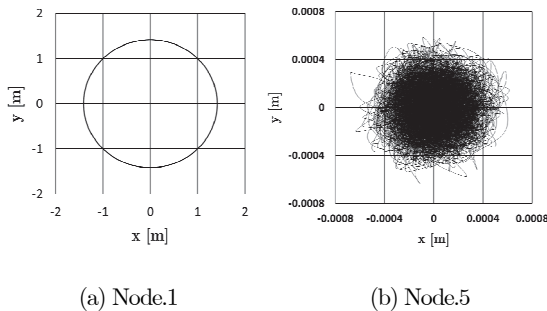


Fig. 3 Locus of node

また、エネルギー、角運動量を示す。

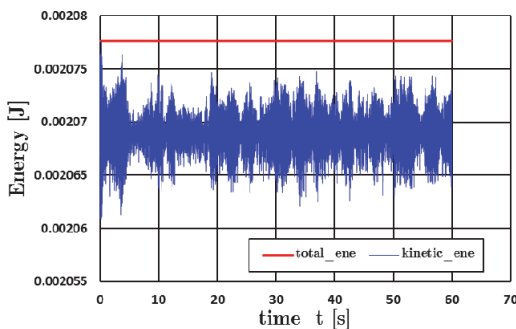


Fig. 4 Conservation of energy

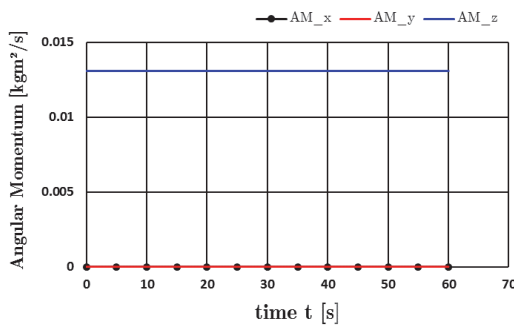


Fig.5 Conservation of angular momentum

4. 考察

計算結果として想定されるのは Node.5 を中心として膜全体が回転することである。Node.1 を見ると、原点を中心とした半径1[m]の円を描いている。また、Node.5 を見る

と、原点に対して 10^{-4} [m] の範囲で停留しており、解析結果は想定される運動とほぼ等しいことがわかる。また、Fig.5 より全エネルギー、角運動量の保存が成り立っていることも確認できる。エネルギー、角運動量の数値変動はそれぞれ 10^{-10} [J], 10^{-10} [kgm²/s] オーダーであり数値的に安定な計算が行えていると考えられる。また、膜の剛性を低減しない場合、運動エネルギーと歪エネルギーの交換が周期的に行われることを考えると、剛性低減モデルの導入も正しく行われたと考えられる。

計算結果より、EMM による構造保存型の解析が行えているといえるので、計算時間の短縮法についても考える。まず、コーディングする上で用いる理論式で計算時間が変化する。膜要素の場合、等方性膜を仮定することができれば式が簡略化され、コーディングの際に生じる煩雑さや計算コストを低減することができる。しかし、等方性を仮定できない膜が解析対象である場合、異方性膜での解析が必須となる。その場合、剛性マトリクスは非常に複雑になるため、計算コストが増加することが予想される。そのため、例えば剛性マトリクスの計算を行わず反復計算を行うことや、計算処理の並列化などを行うなどが必要である。いずれにせよ、単に構造保存型の計算アルゴリズムを構築するだけでは計算速度の高速化はできない。そのため、反復計算のアルゴリズムや、処理方法を改善することが必要となる。

5. 結論

本研究では以下の結論を得た

- ・構造保存型の運動方程式を提案することができた。
 - ・異方性膜要素に関して剛性の低減手法およびその等価節点力および剛性マトリクスの定式化が行えた。
 - ・構造保存型の時間スキームを用いることで、エネルギー、運動量、角運動量が保存される系では解析結果も保存される。
- 以上のように、構造保存型解法は弾性体の解析に適していることが示された。今後は、異方性膜要素のコーディングを行い、異方性と等方性の比較を行うことを目指す。さらに、計算を高速化させ計算コストの削減を目指す。

6. 謝辞

本研究は文科省・科研費 15H04204 の補助を受けて行われました。

参考文献

- [1] 宮崎康行 ゴッサマーマルチボディーダイナミクスの基礎
- [2] 宮崎康行 Energy Momentum 法について
- [3] Yasuyuki Miyazaki, Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane, International Journal for Numerical Methods in Engineering May 2006 ; 66:1179-1209