

剛体及び剛体拘束系への構造保存型 ANCF の適用

Structure-Preserving Absolute Nodal Coordinate Formulation for Rigid Body and Rigid Body Constraint

宮崎・山崎研究室

Miyazaki-Yamazaki Laboratory

菅野宏伸

Hironobu Sugano

Conventionally, rotational equations of motion for rigid body is formulated using finite rotation vectors, and we can obtain an orthogonal transformation matrix that shows the attitude of rigid body. But, in fact, this formulation leads to a nonlinear mass matrix. Therefore, in this study, we derive equations of motion whose mass matrix is constant using absolute nodal coordinate formulation. In this formulation, we use the penalty potential method to the redundant degrees of freedom. It is expected that these equations have a risk of numerical instability associated with time integration. Thus, to avoid this instability, this paper derives the discrete equations of motion by energy-momentum method that provides the solution that satisfies the conservation of total energy and momentum, and examine the validity by the numerical calculation.

Nomenclature

$\Delta \mathbf{a}$	各時間ステップ間の増分, $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t_n) - \mathbf{a}(t_{n-1})$
$\bar{\mathbf{a}}$	現在と前ステップの平均値, $\bar{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}(t_n) + \mathbf{a}(t_{n-1})] / 2$
$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$	離散微分, $\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \cdot \Delta z$
$\hat{\mathbf{a}}$	外積を表す歪対称行列, $\hat{\mathbf{z}} \mathbf{u} = \mathbf{z} \times \mathbf{u}$

1. 序論

1.1. 研究背景

近年, Fig.1 に示すように, ソーラーセイルや宇宙太陽光発電システムに代表される大型宇宙構造物が注目されている。これらの構造物は, 収納性・可展開性を有し, 軽量であることが望ましく, その特徴ゆえに地上実験において大気や重力の影響を受け, 宇宙とは異なる挙動を示す。従って, 設計・開発において, 数値計算による挙動予測が重要な位置を占める。実際, JAXA により 2010 年 5 月に打ち上げられた小型ソーラー電力セイル実証機 IKAROS において, EMM (Energy-Momentum Method) を用いた数値計算が行われ, その有効性が示された^[1]。ただし, 宇宙構造物の大型化に伴い, 今後は高い予測精度のみならず, 開発に耐えうるだけの十分な計算速度が要求される。

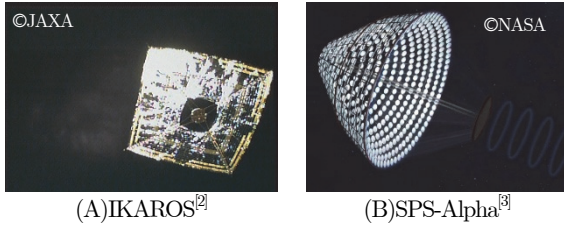


Fig.1 Examples of a Large Space Structure

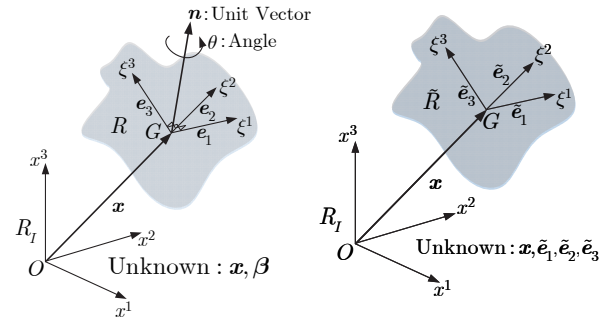
1.2. 研究目的

数値計算の高速化の為, 本研究では, 剛体の質量マトリクスが時間変化することで計算時間が増大する問題に着目する。

Fig.2 に示すように, 従来, 剛体の回転運動は有限回転ベクトル β を用いて定式化される。しかし, 角速度ベクトルが時間積分できないことにより, 質量マトリクスが剛体の姿勢に依存し, 結果として時々刻々変化する。それゆえ, 各時間ステップにおける反復計算において, 毎回, マトリクス処理を必要とし, 計算時間がかかる。そこで, 本研究では, 剛体回転を絶対

静止系における勾配ベクトル $\tilde{\mathbf{e}}_i$ を用いて表す Absolute Nodal Coordinate Formulation^[4,6] (以下, ANCF) を剛体に対して適用することで, 質量マトリクスが一定の運動方程式を導く。その際, 剛体の回転自由度に対して ANCF を適用した剛体 (以下, ANCF 剛体) の回転自由度が冗長となるため, 歪を用いたペナルティポテンシャルを導入する。これは, 剛体を弾性体に近似した場合に相当し, ペナルティ係数は物理的にはヤング率を表す。このとき, ヤング率 (ペナルティ係数) の増大に伴う高周波の発生に起因して, 運動方程式は堅い微分方程式となる。従って, 構造保存型解法である EMM を用いることで, エネルギー原理・運動量原理・角運動量原理 (以下, 三原理) を厳密に満たす離散化された運動方程式を導く^[7-9]。また, トラス等の弾性体が, ANCF 剛体上の位置拘束を受ける際の運動方程式の修正法を導く。

本稿では, ANCF 剛体, および, 位置拘束を受ける物体の運動方程式の修正法を導くとともに, その妥当性を数値計算により検証した結果を示す。その結果, 妥当であると結論を得た。



(a) Conventional Rigid Body (b) ANCF Rigid Body
Fig.2 Comparison between Conventional Rigid Body and Rigid Body Applied ANCF

2. 運動学

この章では, ANCF 剛体の運動学について述べる。そして次章以降では, ANCF 剛体の Lagrange 方程式, EMM により離散化された運動方程式を導く。

2.1. 位置ベクトルと速度ベクトル

Fig.3 に示す通り, ANCF 剛体内の質量中心の位置ベクトルを \mathbf{x} , ANCF 剛体に取り付けた物体座標系の基底マトリクスを $\tilde{\mathbf{R}}$, 物体座標系で点 G からみた剛体内の任意の点 P の位置

ベクトルを $\boldsymbol{\xi}$, これを絶対座標系で見たときのベクトルを \boldsymbol{r} とすれば, 絶対座標系での点P の位置ベクトル $\tilde{\boldsymbol{x}}$, 速度ベクトル $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}$ は次のように書ける.

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} + \xi^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\xi}^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i \quad (2)$$

ただし, $\boldsymbol{\xi} = [\xi^1 \ \xi^2 \ \xi^3]^T$, $\tilde{\boldsymbol{R}} = [\tilde{\boldsymbol{e}}_1 \ \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \ \tilde{\boldsymbol{e}}_3]$ とする.

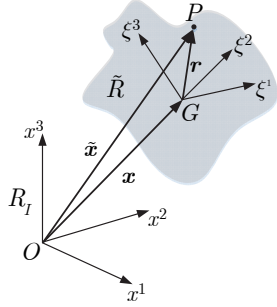


Fig.3 ANCF Rigid Body

2.2. 運動エネルギー

体積を V , 密度を ρ とすれば, 式(2)より運動エネルギー T は,

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}^2 dV = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{x}}^2 + \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\xi}^i \cdot \dot{\xi}^j \quad (3)$$

と書ける. ただし,

$$M \equiv \int_V \rho dV, \quad m_{ij} \equiv \int_V \rho \xi^i \xi^j dV \quad (4)$$

2.3. ペナルティポテンシャル

ANCF 剛体の回転自由度は冗長である為, 歪を用いたペナルティポテンシャルを導入し, 変形を拘束する. いま, Green-Lagrange 歪テンソルは,

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} (\tilde{\boldsymbol{R}}^T \tilde{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \varepsilon_4 & \frac{1}{2} \varepsilon_6 \\ \frac{1}{2} \varepsilon_4 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \varepsilon_5 \\ \frac{1}{2} \varepsilon_6 & \frac{1}{2} \varepsilon_5 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

と書ける. ここで, 工学歪 $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6]^T$ に対応したペナルティ係数 $\boldsymbol{\alpha} \equiv [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6]^T$ を用いると, ペナルティポテンシャル U^{pen} は,

$$U^{pen} = \frac{1}{2} V \alpha_i \varepsilon_i^2 = b_i \varepsilon_i^2 \quad (6)$$

となる. ただし, $b_i = V \alpha_i$ とする.

2.4. 運動量と角運動量

運動量 \boldsymbol{P} , 角運動量 \boldsymbol{L} は, 式(1), (2)より次のように書ける.

$$\boldsymbol{P} = \int_V \rho \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} dV = M \dot{\boldsymbol{x}} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{L} = \int_V \tilde{\boldsymbol{x}} \times \rho \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} dV = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{P} + m_{ij} \tilde{\boldsymbol{e}}_i \times \dot{\xi}^j \quad (8)$$

2.5. 姿勢マトリクス・角速度の近似

ANCF 剛体において, 時々刻々得られる $\tilde{\boldsymbol{R}}$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{R}}}$ の値から姿勢マトリクス \boldsymbol{R} , 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を得る必要がある場合, 以下のように弾性変形の影響を取り除くことで求める.

ここで, 右 Cauchy-Green 変形テンソル \boldsymbol{C} はストレッチテンソルを \boldsymbol{U} とすれば,

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \tilde{\boldsymbol{R}}^T \tilde{\boldsymbol{R}} \quad (9)$$

と書ける. また, 右 Cauchy-Green 変形テンソルの固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}_i$, 固有値を λ_i とすれば,

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \boldsymbol{\phi}_i \otimes \boldsymbol{\phi}_i \quad (10)$$

となるので, 変形勾配テンソルの右極分解 $\tilde{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$ より,

$$\boldsymbol{R} = \tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{U}^{-1} \quad (11)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{R}}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{U}} \quad (12)$$

と書ける. 以上より,

$$\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{R}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{R}}}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1} \quad (13)$$

と定義すると, 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は以下のように近似できる.

$$\boldsymbol{\omega} \simeq \frac{\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^T}{2} \quad (14)$$

3. Lagrange方程式の導出

この章では 2 章で述べた運動学を元に, Hamilton の原理より ANCF 剛体の Lagrange 方程式を導く. また, ANCF 剛体に対してトラス等が付随した際の位置拘束を加味した Lagrange 方程式を導く.

3.1. Hamiltonの原理

Lagrangian を $L = T - U^{pen}$, 内部エネルギーを $\Pi = T + U^{pen}$, 外力による仕事を W , 一般化座標 $\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{e}}_i$ に対する一般化内力を $\boldsymbol{f}^x, \boldsymbol{f}^i$, 一般化外力を $\boldsymbol{F}^x, \boldsymbol{F}^i$ とすれば, Hamilton の原理より,

$$\begin{aligned} & -\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + W) dt \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[(\boldsymbol{f}^x - \boldsymbol{F}^x) \cdot \delta \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{f}^i - \boldsymbol{F}^i) \cdot \delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

と書ける. 従って, Lagrange 方程式は,

$$\boldsymbol{f}^x = \boldsymbol{F}^x, \quad \boldsymbol{f}^i = \boldsymbol{F}^i \quad (16)$$

となり, 微分型の三原理,

$$\begin{cases} \dot{\Pi} = \boldsymbol{F}^x \cdot \delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}^i \cdot \delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i \\ \dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F}^x \\ \dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}^x + \tilde{\boldsymbol{e}}_i \times \boldsymbol{F}^i \end{cases} \quad (17)$$

を厳密に満たす. ただし,

$$\boldsymbol{f}^x = M \ddot{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{f}^i \equiv m_{ij} \ddot{\xi}^j + \boldsymbol{f}_e^i \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_e^i &= b_i (\tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_i - 1) \tilde{\boldsymbol{e}}_i + 2b_l (\tilde{\boldsymbol{e}}_m \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_n) (\delta_{ml} \tilde{\boldsymbol{e}}_m + \delta_{mn} \tilde{\boldsymbol{e}}_n) \\ (l, m, n) &= (4, 1, 2) (5, 2, 3) (6, 3, 1) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタとする.

3.2. 剛体上の点の位置拘束条件

拘束点の位置ベクトルを \boldsymbol{x}^c とすると、式(1)より、

$$\boldsymbol{x}^c = \boldsymbol{x} + \xi^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i, \quad \delta \boldsymbol{x}^c = \delta \boldsymbol{x} + \xi^i \delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i \quad (20)$$

となる。上式を満たすように運動方程式を修正すると、式(15)より、Lagrange 方程式は以下となる。

$$\boldsymbol{f}^x + \boldsymbol{f}^c = \boldsymbol{F}^x + \boldsymbol{F}^c, \quad \boldsymbol{f}^i + \xi^i \boldsymbol{f}^c = \boldsymbol{F}^i + \xi^i \boldsymbol{F}^c \quad (21)$$

4. EMMによる運動方程式の導出

この章では ANCF 剛体に対して EMM を適用することにより、離散化された運動方程式 (以下、離散運動方程式) を導く。

4.1. 増分型の三原理

EMM では増分型の三原理を満たすように、離散化された内力および外力を導くことで運動方程式を離散化する。ここで、一般化座標 $\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{e}}_i$ に対する離散内力を $\tilde{\boldsymbol{f}}^x, \tilde{\boldsymbol{f}}^i$ 、離散外力を $\tilde{\boldsymbol{F}}^x, \tilde{\boldsymbol{F}}^i$ とすると、

$$\Delta \Pi = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right)^T \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i} \right)^T \cdot \Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i + \left(\frac{\partial U^{pen}}{\partial \tilde{\boldsymbol{e}}_i} \right)^T \cdot \Delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i \quad (22)$$

$$\Delta W = \tilde{\boldsymbol{F}}^x \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{F}}^i \cdot \Delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i, \quad \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta t} = M \frac{\Delta \dot{\boldsymbol{x}}}{\Delta t} \quad (23)$$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{L}}{\Delta t} = \bar{\boldsymbol{x}} \times \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta t} + \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t} \times \bar{\boldsymbol{P}} + m_{ij} \left(\bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i \times \frac{\Delta \tilde{\boldsymbol{e}}_j}{\Delta t} + \frac{\Delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i}{\Delta t} \times \bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_j \right) \quad (24)$$

と書けるので、時間積分則を、

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t}, \quad \bar{\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i} = \frac{\Delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i}{\Delta t} \quad (25)$$

として、離散運動方程式を、

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^x = \tilde{\boldsymbol{F}}^x, \quad \tilde{\boldsymbol{f}}^i = \tilde{\boldsymbol{F}}^i \quad (26)$$

とすることにより離散化された三原理、

$$\begin{cases} \Delta \Pi = \tilde{\boldsymbol{F}}^x \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{F}}^i \cdot \Delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i \\ \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta t} = \tilde{\boldsymbol{F}}^x \\ \frac{\Delta \boldsymbol{L}}{\Delta t} = \bar{\boldsymbol{x}} \times \tilde{\boldsymbol{F}}^x + \bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i \times \tilde{\boldsymbol{F}}^i \end{cases} \quad (27)$$

を厳密に満たす。ただし、

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^x = M \frac{\Delta \dot{\boldsymbol{x}}}{\Delta t}, \quad \tilde{\boldsymbol{f}}^i = m_{ij} \frac{\Delta \dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_j}{\Delta t} + \tilde{\boldsymbol{f}}_e^i \quad (28)$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_e^i = b_i \left(\bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i \cdot \bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i - 1 \right) \bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i + 2b_l \left(\bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_m \cdot \bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_n \right) \left(\delta_{mi} \bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_m + \delta_{ni} \bar{\tilde{\boldsymbol{e}}}_n \right) \quad (29)$$

$$(l, m, n) = (4, 1, 2)(5, 2, 3)(6, 3, 1)$$

以上の関係式は $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で式(17), (18),(19)と一致する。

4.2. 剛体上の点の位置拘束条件

式(20)より拘束点の位置ベクトル \boldsymbol{x}^c の増分は、

$$\Delta \boldsymbol{x}^c = \Delta \boldsymbol{x} + \xi^i \Delta \tilde{\boldsymbol{e}}_i \quad (30)$$

となる。上式を満たすように運動方程式を修正すると、式(22), (23)より、離散運動方程式は以下となる。

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^x + \tilde{\boldsymbol{f}}^c = \tilde{\boldsymbol{F}}^x + \tilde{\boldsymbol{F}}^c, \quad \tilde{\boldsymbol{f}}^i + \xi^i \tilde{\boldsymbol{f}}^c = \tilde{\boldsymbol{F}}^i + \xi^i \tilde{\boldsymbol{F}}^c \quad (31)$$

5. 数値計算による理論の検証

本章では、数値計算により4章で述べた理論の妥当性の検証を行う。その際、従来の剛体と ANCF 剛体の回転運動の比較を行う。また、時間積分則は EMM とする。

5.1. 剛体

本節では、ANCF 剛体の離散運動方程式の妥当性を検証する。以下に本節で用いる剛体とその諸元を示す。また、初期角速度は $\boldsymbol{\omega} = [0.3 \ 0.5 \ 0.8]^T$ 、収束半径は 10^{-12} m とする。

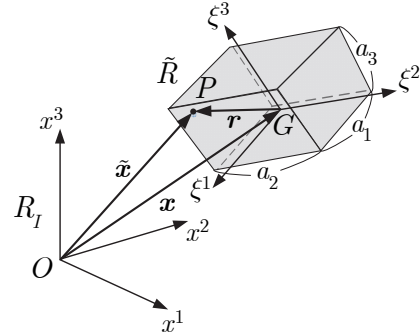


Fig.4 Cubic Rigid Body

Table 1 Parameters of Rigid Body

辺の長さ a_1	3.0 m
辺の長さ a_2	2.0 m
辺の長さ a_3	1.0 m
密度	2700 kg/m ³

(1) 角速度の比較

まず、ペナルティ係数を変化させた ANCF 剛体の角速度を従来剛体と比較した結果を Fig. 5 に示す。ただし、時間ステップ幅を 10^{-3} s とした。これより、ペナルティ係数の増加と共に ANCF 剛体の角速度が従来剛体の値に収束することがわかる。

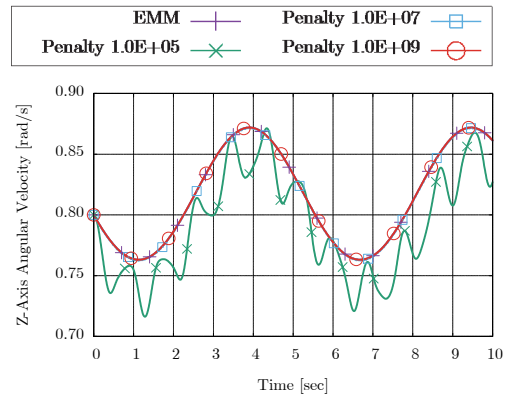


Fig. 5 Z-Axis Angular Velocity depending on Penalty Coefficient using EMM

(2) 内部エネルギーの比較

次に、ANCF 剛体の数値安定性に関する検証として、時間ステップ幅 Δt の変化に伴う内部エネルギーの変化の比較を行った。

その結果を Fig. 6 に示す。ただし、ペナルティ係数はとした。これより、ANCF 剛体では内部エネルギーが厳密に保存されることがわかる。

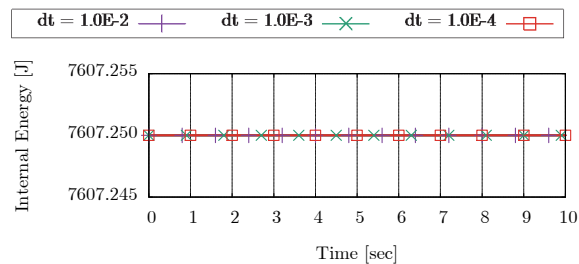


Fig. 6 Internal Energy depending on Time Step Width using EMM

5.2. 剛体拘束系

次に、従来の剛体拘束系と ANCF 剛体拘束系の比較を行う。以下に図とその諸元を示す。ただし、初期角速度を $\omega = [0.3 \ 0.5 \ 0.8]^T$ とし、収束半径は 10^{-12} m とした。

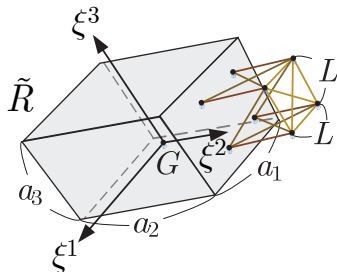


Fig.7 Truss Bounded by ANCF Rigid Body

Table 2 Parameters of Truss and ANCF Rigid Body

剛体		トラス	
辺の長さ a_1	3.0 m	長さ L	0.8 m
辺の長さ a_2	2.0 m	断面積	10^{-4} m^2
辺の長さ a_3	1.0 m	密度	2700 kg/m^3
密度	2700 kg/m^3	ヤング率	70 GPa

(1) 角速度の比較

トラスが付随した従来剛体と ANCF 剛体のペナルティ係数の変化に伴う角速度の比較を行った結果を Fig.8 に示す。ただし、時間ステップ幅を 10^{-3} s とした。これより、ペナルティ係数の増加と共に剛体拘束系においても角速度が従来剛体の角速度の値に収束していることがわかる。

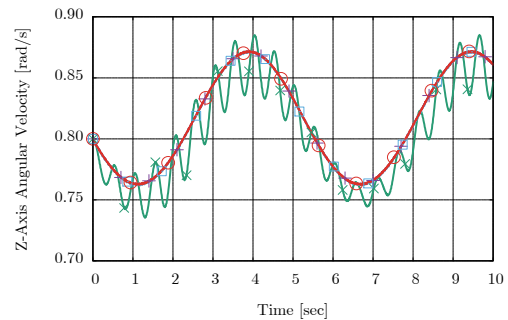


Fig.8 Z-Axis Angular Velocity depending on Penalty Coefficient using EMM

(2) 内部エネルギーの比較

最後に、剛体拘束系の数値安定性に関する検証として、時間ステップ幅 dt の変化に伴う内部エネルギーの変化の比較を行った。ペナルティ係数はとした。

Fig. 9 より、剛体拘束系においても内部エネルギーが厳密に保存していることがわかる。

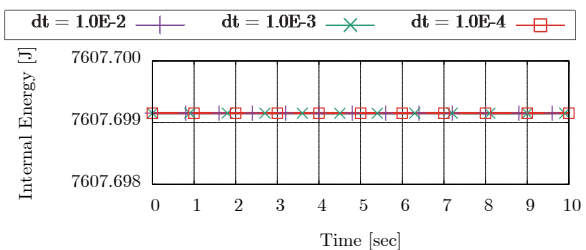


Fig. 9 Internal Energy depending on Time Step Width using EMM

6. 結論

本稿では以下の結論を得た。

- 1) ANCF を適用した剛体の運動学を導いた。
- 2) その運動学をもとに、ANCF 剛体の運動方程式、離散運動方程式を導いた。
- 3) 剛体上の点の位置拘束条件を加味した運動方程式の修正法を導いた。
- 4) 数値計算により導出した運動方程式が妥当であると示した。

なお、本稿では計算速度に関する比較は行っていない。よって、今後、計算速度に関する比較を行い、ANCF 剛体の優位性を証明したいと考えている。

参考文献

- [1] 奥泉信克, 白澤洋次, 宮崎康行, 森治, 小型ソーラー電力実証機 IKAROS の薄膜セイル展開挙動, 日本マイクロ重力応用学会誌, Vol.29, pp48 - 55, 2012.
- [2] JAXA デジタルアーカイブス, JAXA, <http://jda-strm.tksc.jaxa.jp/archive/photo/P100005965/f46c51d8e15aaf19410826a45e594153.jpg> (2017.1)
- [3] Office of the Chief Technologist, NASA, https://www.nasa.gov/images/content/590465main_mankins_full.jpg (2017.1)
- [4] Ahmed A.Shabana, H.A.Hussien, J.L.Escalona, Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Large Rotation and

- Large Deformation Problems, Journal of Mechanical Design, Vol.120, pp188 – 195, January 1998.
- [5] Ahmed A. Shabana, Refaat Y. Yakoub, Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Theory, Journal of Mechanical Design, Vol.123, pp.606 – 613, December 2001.
- [6] Refaat Y. Yakoub, Ahmed A. Shabana, Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Implementation and Applications, Journal of Mechanical Design, Vol. 123, pp.614 – 621, December 2001.
- [7] Yasuyuki Miyazaki, Tsuyoshi Kodama, Formulation and Interpretation of the Equation of Motion on the Basis of the Energy-Momentum Method, Journal of Multi-body Dynamics, 218(1), 1-7.
- [8] 児玉剛, 宮崎康行, エネルギー・モーメント法における運動方程式の導出手順と解釈について, 日本機械学会論文集 (C 編), 69 巻 684 号, August 2003.