

修正コンプライアンス法の開発 Development of the Compliance Modification Method

指導教授 中村 義隆

M2003 大川 祐輔

Abstract

有限要素法(FEM)による非線形構造解析は、解析対象の大規模化に伴い多くの解析時間を必要とする。そこで計算時間の短縮化を目的に、修正コンプライアンス法(CMM-Compliance Modification Method)を開発した。CMMとは、時々刻々の状態変化ごとに逆行列を計算することなく、状態変化による影響を変化前のコンプライアンスマトリックスを修正することで、解析時間を短縮化する手法である。この手法を用いることにより、従来のFEMによる解析精度を保ちつつ、解析時間を大幅に短縮することができた。本論文では、まずCMMの定式化を行い、CMMによる精度および解析時間について有効性を検証した。

1. 緒言

解析対象の大規模化に伴い、FEMによる非線形構造解析には解析時間が膨大となる。例えば、膜構造の圧縮変形や構造に穴があいた場合、亀裂、接触など時々刻々と状態が変化する場合などが挙げられる。これは主に状態変化があるたびごとに剛性マトリックスの逆行列(コンプライアンスマトリックス)を計算していることによる。

そこで本論文では、剛性マトリックスの逆行列を計算する代わりに、状態変化に対して直接コンプライアンスマトリックスを修正して計算時間を短縮する方法、修正コンプライアンス法(CMM)を開発した。実際に構造解析を行い、理論の妥当性と精度および解析時間を検証し、その有効性を確認する。

2. 理論

2-1. 修正コンプライアンス法(CMM)

例えば構造体の一部に剛性の変化が起きた場合や、部分的な構造部分の付加または除去による領域の変化が生じた場合、はじめから新たに剛性マトリックスを生成して、逆行列を求めて計算する。この過程に多大な計算時間を要する。そこで、逆行列を計算せず、変化前の構造体のコンプライアンスマトリックスを直接修正することができれば、計算する時間の短縮化を図ることができる。この方法を修正コンプライアンス法(CMM)と呼ぶ。

2-2. 修正コンプライアンスマトリックス

定式化は二次元平面問題で行う。

構造体の平衡方程式は、剛性マトリックスを \mathbf{k}_o 、剛性マトリックスのコンプライアンスマトリックスを $\mathbf{k}_o^{-1} = \mathbf{g}_o$ として、次式のように表せる。

$$\mathbf{k}_o \mathbf{u}_o = \mathbf{f}_o \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_o = \mathbf{k}_o^{-1} \mathbf{f}_o = \mathbf{g}_o \mathbf{f}_o \quad (2)$$

Fig.1のように、ある二次元構造体に三角形要素が付着する場合を考える。

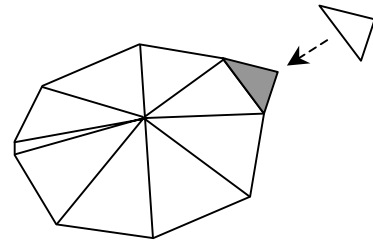


Fig.1 元の構造体に三角形要素が付着する場合

新しく付加する三角形要素については次式で表す。

$$\tilde{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (3)$$

Fig.1のような付加要素がもとの構造体と接する基底部(添え字: b)と接しない自由部(添え字: s)に分かれる場合剛性マトリックスを、

$$\tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_{ss} & \tilde{\mathbf{k}}_{sb} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{bs} & \tilde{\mathbf{k}}_{bb} \end{bmatrix} \quad (4)$$

とすると、付加要素の平衡方程式は次式のように変形できる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_{ss} & \tilde{\mathbf{k}}_{sb} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{bs} & \tilde{\mathbf{k}}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_s \\ \tilde{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_{ss} \tilde{\mathbf{u}}_s + \tilde{\mathbf{k}}_{sb} \tilde{\mathbf{u}}_b \\ \tilde{\mathbf{k}}_{bs} \tilde{\mathbf{u}}_s + \tilde{\mathbf{k}}_{bb} \tilde{\mathbf{u}}_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_s \\ \tilde{\mathbf{f}}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{f}}_b \end{Bmatrix} \quad (5)$$

付加要素基底部における平衡方程式は、

$$\tilde{\mathbf{k}}_b \tilde{\mathbf{u}}_b = \tilde{\mathbf{f}}_b \quad (6)$$

となり、式(5)より $\tilde{\mathbf{k}}_b$ は次のように変形できる。

$$\tilde{\mathbf{k}}_b = \tilde{\mathbf{k}}_{bb} - \tilde{\mathbf{k}}_{bs} \tilde{\mathbf{k}}_s^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_{sb} \quad (7)$$

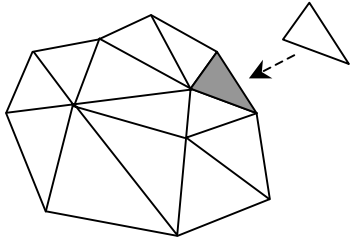


Fig.2 節点がもとの構造体と接する場合

Fig.2 のように付加要素の節点が全てもとの構造体と接する場合は、 $\tilde{\mathbf{k}}_{ss} = \mathbf{0}$ なので $\tilde{\mathbf{k}}_b = \tilde{\mathbf{k}}$ となる。

ここで、付加要素が付着するというを、あたかも付加要素が付着しているように基底部に等価力が作用する、と置き換えて考えていく。

変化前の本体付着基底部だけについて考えると、この部分の剛性マトリックス \mathbf{h}_b を次式で表せる。

$$\mathbf{h}_b = \mathbf{g}_b^{-1} \quad (8)$$

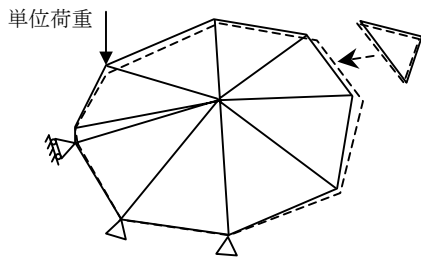


Fig.3 節点 i に単位荷重を作用させる

Fig.3 のように付加前に本体の任意節点 i に単位荷重が作用した時を考え、それによる本体付着基底部の節点変位を \mathbf{u}_{ib} とする。付着後は、そこに付着する付加要素付着基底部は $\tilde{\mathbf{u}}_{ib}$ だけ変位したとすると、本体変位は $\mathbf{u}_{ib} - \tilde{\mathbf{u}}_{ib}$ となる。よって本体付着部における内力は次式となる。

$$\mathbf{h}_b (\mathbf{u}_{ib} - \tilde{\mathbf{u}}_{ib}) = \mathbf{f}_{ib} \quad (9)$$

また、付加要素付着基底部における内力は次式となる。

$$\tilde{\mathbf{k}}_b \tilde{\mathbf{u}}_{ib} = \tilde{\mathbf{f}}_{ib} \quad (10)$$

内力の釣り合いの関係 $\mathbf{f}_{ib} = \tilde{\mathbf{f}}_{ib}$ から、式(9)、(10)より次の関係が導かれる。

$$\tilde{\mathbf{u}}_{ib} = (\tilde{\mathbf{k}}_b + \mathbf{h}_b)^{-1} \mathbf{h}_b \mathbf{u}_{ib} \quad (11)$$

式(9)、(11)より、付着部での節点力 \mathbf{f}_{ib} は次のように求まる。

$$\mathbf{f}_{ib} = \tilde{\mathbf{k}}_b \tilde{\mathbf{u}}_{ib} = \tilde{\mathbf{k}}_b (\tilde{\mathbf{k}}_b + \mathbf{h}_b)^{-1} \mathbf{h}_b \mathbf{u}_{ib} \quad (12)$$

この節点力 \mathbf{f}_{ib} が本体に作用したことによる本体の変位が、付加要素が付着したことによる本体のコンプライアンスの変化とみなせるので、付加要素付着後における本体のコンプライアンスマトリックス $\hat{\mathbf{g}}_{ij}$ は次のように補正される。

$$\hat{\mathbf{g}}_{ij} = \mathbf{g}_{ib} - \mathbf{g}_{bj} \mathbf{f}_{ib} = \mathbf{g}_{ib} - \mathbf{g}_{bj} \tilde{\mathbf{k}}_b (\tilde{\mathbf{k}}_b + \mathbf{h}_b)^{-1} \mathbf{h}_b \mathbf{u}_{ib} \quad (13)$$

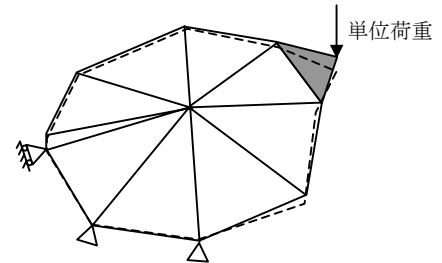


Fig.4 自由部に単位荷重を作用させた場合

Fig.4 のように付加要素の自由部がある場合は、新しくコンプライアンスマトリックスの行列要素を増やす必要がある。そこでこの付加要素自由部に単位荷重を作用させると、本体の付着基底部の剛性マトリックスは式(8)より与えられるので次のように求められる。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{k}_e^{-1} \quad (14)$$

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_{ss} & \tilde{\mathbf{k}}_{sb} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{bs} & \tilde{\mathbf{k}}_{bb} + \mathbf{h}_b \end{bmatrix} \quad (15)$$

よって付着部に作用する内力 $\tilde{\mathbf{f}}_b$ は、式(14)より $\tilde{\mathbf{u}}_b$ を取り出すと、

$$\tilde{\mathbf{f}}_b = \tilde{\mathbf{k}}_b \tilde{\mathbf{u}}_b = \tilde{\mathbf{k}}_b \mathbf{k}_e^{-1} \quad (16)$$

付加要素付着後の全体修正コンプライアンスマトリックス $\hat{\mathbf{g}}$ は次式のようなになる。

$$\hat{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{ss} & \mathbf{g}_{so} \\ \mathbf{g}_{os} & \hat{\mathbf{g}}_{ij} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{g}_{ss} = \mathbf{k}_e^{-1} \quad (18)$$

$$\mathbf{g}_{os} = \mathbf{g}_{so}^T = \hat{\mathbf{g}}_{ij} \mathbf{f}_b = \hat{\mathbf{g}}_{ij} \mathbf{k}_b \mathbf{k}_e^{-1} \quad (19)$$

ここで \mathbf{g}_{ss} は付加要素自由部における新しく作成されたコンプライアンスマトリックスの行列要素であり、
 $\mathbf{g}_{os} = \mathbf{g}_{so}^T$ は基底部よりもとの構造体の修正コンプライアンスマトリックスによる影響を受けている次数である。

3. 計算例

3-1. 解析モデル

具体的な例として、Fig.5 および Table.1 のモデルにたいして、いくつかの状態の変化に対して修正コンプライアント法(CMM)を用いて平面応力問題を解く。使用する PC は Pentium III 1.33GHz/L2 キャッシュ 512KB/メモリ 512MB である。

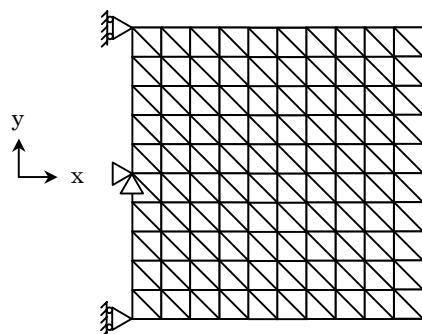


Fig.5 解析モデル

Table.1 解析モデル

寸法	100[mm]×100[mm]×1[mm]		
X 方向分割数	10	ヤング率	210 [N/mm ²]
Y 方向分割数	10		
要素数	200	ポアソン比	0.3

3-2. 解析結果

Table.2 ように値を定義する。

Table.2 値の定義

N _{BASE}	もとの構造体の要素数
N _{CMM}	付加または除去する要素数
t _u	従来の方法でコンプライアンスマトリックスを求めるまでの時間※1
t _{CMM}	CMM により修正コンプライアンスマトリックスを求めるまでの時間※1
g _{ijmax}	修正コンプライアンスの行列要素の最大値
Δg _{ijmax}	コンプライアンスの誤差の最大値

※1: PC における時間計測値(1/1000≒1sec)

Case1: 1 要素付加 (付け足し)

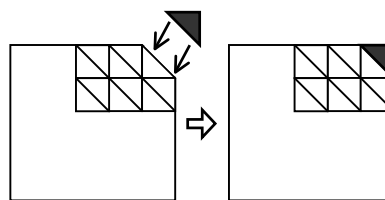


Fig.6 Case1 解析モデルの一部

Table.3 Case1 結果

N _{BASE}	199	t _u	410
N _{CMM}	1	t _{CMM}	20
g _{ijmax}	0.000746029		
Δg _{ijmax}	6.77626 × 10 ⁻²¹		

Case2: 1 要素付加 (埋め込み)

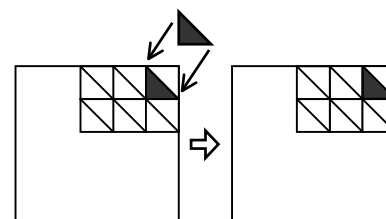


Fig.7 Case2 解析モデルの一部

Table.4 Case2 結果

N _{BASE}	199	t _u	410
N _{CMM}	1	t _{CMM}	30
g _{ijmax}	0.000748672		
Δg _{ijmax}	3.35018 × 10 ⁻¹⁸		

Case3: 1 要素付加 → 1 要素除去

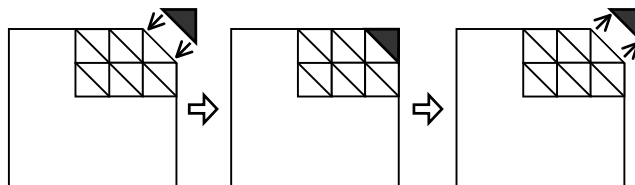


Fig.8 Case3 解析モデルの一部

Table.5 Case3 結果

N _{BASE}	199	t _u	400
N _{CMM}	1/-1	t _{CMM}	20/30
g _{ijmax}	0.000730116		
Δg _{ijmax}	1.0842 × 10 ⁻¹⁸		

Case4 : 10 要素順次付加
 三角形付加要素を Fig.9 の下から順番に加えていく。

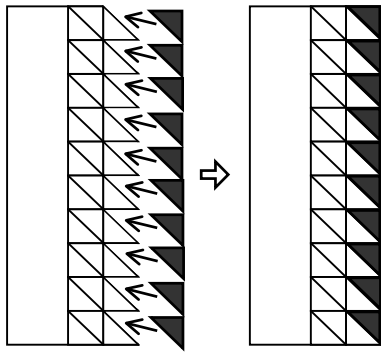


Fig.9 Case4 解析モデルの一部

Table.6 Case4 結果

NBASE	190	t _u	360
N _{CMM}	1→10	t _{CMM}	(10~20)×10回
g _{ijmax}	0.000746029		
Δg _{ijmax}	6.93887×10 ⁻¹⁸		

計算時間に注目すると、Case1～Case4において従来の方法による逆行列を計算するまでの時間に対して、CMMによる修正コンプライアンスを計算するまでの時間は1/10以下であることが分かる。また精度に注目すると、両方法による違いは10⁻¹⁴～10⁻¹⁷のオーダーであることが分かる。Case4より、一般にCMMで修正する要素が10程度ならまだCMMを用いて計算した方が早いので、実用上一度の形状変化を与えることに対して十分余裕があると考えられる。

次に、従来の方法によるコンプライアンスを計算する時間とCMMによる修正コンプライアンスを計算する時間をマトリックスの次元数に関して調べる。基本モデルはFig.5とし、x方向分割数を変えることで次元数を変化させていき、Case1の付け足しの例で計算時間を比較した。その結果をFig.10およびFig.11に示す。

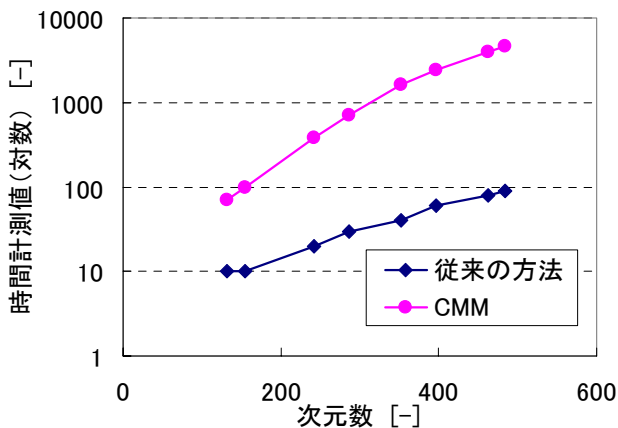


Fig.10 次元数 - 時間計測値

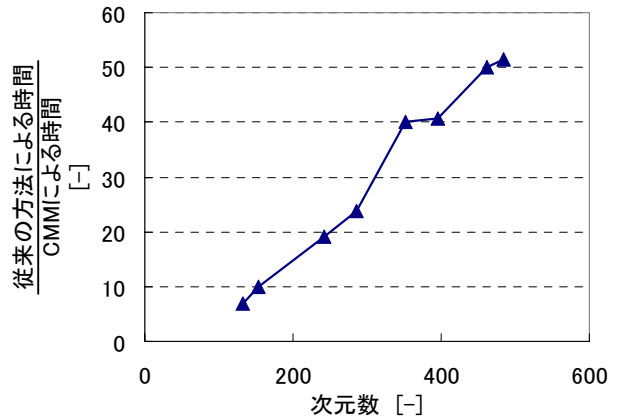


Fig.11 次元数 - FEM 計算時間/CMM 計算時間

Fig.10より、従来の方法による計算時間は次元数 x が増えたときの増加分を式で表すと約 $10^{0.00462x}$ であるのに対して、CMMによる計算時間の次元数 x が増えたときの増加分を式で表すと約 $10^{0.00026x}$ であることが分かり、従来の方法による計算時間に比べて短時間で計算されていることが分かる。またFig.11より、次元数が増えれば増えるほどCMMによる時間の短縮化の影響が大きくなっていくことが分かる。

4. 結言

修正コンプライアンス法(CMM)を開発した。CMMを二次元平面応力問題に適用した結果、修正されたコンプライアンスマトリックスの精度はよく、要素が増えれば増えるほど計算時間の上でCMMが有効になっていくことが分かった。

CMMによる解析は、構造体に付加・除去することによる形状変化や最適形態解析や亀裂の問題に、また構造体の一部の剛性を変化させることにより膜構造の問題など、いろいろな問題に適用できると考えられる。

5. 参考文献

- [1]「有限要素法の基礎と応用」、鷺津久一郎・山本善之共訳、培風館
- [2]「非線形連続体の有限要素法Ⅰ」、J.T. オーデン著、山田嘉昭訳、培風館
- [3]「非線形連続体の有限要素法Ⅱ」、J.T. オーデン著、山田嘉昭訳、培風館
- [4]「Internet-College of Finite Element Method」
<http://www.fem.gr.jp>