

数値データにより生成された接線剛性マトリクスを用いた 非線形構造解析法

Nonlinear Structural Analysis with numerically generated tangent stiffness matrix

指導教授 宮崎康行

M7014 山口晃

1. 序論

一般に、非線形構造解析ではニュートン法をベースにした反復解法により解を求める。その際、ヤコビアン（接線剛性マトリクス）、すなわち、一般化座標による釣合式の偏微分が必要となるが、その定式化は極めて煩雑であり、特に、応力-歪関係が複雑な材料においては、かなりの労力を要する。また、そうやって定式化されたものを用いて計算を行っても、定式化の複雑さゆえに計算時間がかかり、実用に耐えられない場合も少なくない。それゆえ、新素材を用いた構造物、あるいは、従来にはない材料構成から成る構造物の変形等を短期間で解析するには人的/計算コストがかかり、これが、先進的な宇宙機等の開発を難しくしているのが現状である。実際、応力-歪関係が実験による数値データのみで与えられていて、構成則が与えられていない場合、応力-歪関係の近似曲線を適切な基底関数を用いて決定する作業が必要となるが、必ずしも単純な関数で表されるとは限らず、経験が必要とする。

この問題を解消する方法の一つとして、数値微分を用いる方法がある。一般に、応力-歪関係の複雑さ等によらず、釣合式を計算すること自体はそれほどコストを要しない。そこで、数値微分を用いて接線剛性マトリクスを計算するのである。例えば、最も単純な方法としては、一般化座標 q_j の微小変化 Δq_j に対する釣合式 f_i の変化量 Δf_i を求めることで、ヤコビアン J_{ij} を

$$J_{ij} \approx \frac{\Delta f_i}{\Delta q_j} \quad (1)$$

と近似する方法がある。しかし、このような安易な差分近似では、ほんのわずかな誤差が原因で、荷重ステップを重ねてゆくうちに、接線剛性マトリクスの条件数が悪くなり、ニュートン反復が発散することがある。そこで、より精度のよい差分近似を用いることも考えられるが、それは構造物の構造や変形の状況に依存し、必ずしも汎用的な差分近似手法は存在しない。

そこで、本研究では、式(1)の単純な差分近似を用いつつ、接線剛性マトリクスの理論的特長を利用して近似精度を高める方法を提案する。この方法を用いれば、例えば、構成則が与えられていない新素材でも、引張試験結果をそのまま用いることで解析が可能となる。

2. 接線剛性マトリクスの特徴

数値微分により算出された接線剛性マトリクス

\mathbf{K}_{num} は誤差を含むため、誤差を取り除く作業が必要となる。本研究では、解析的に求めた厳密な接線剛性マトリクス \mathbf{K}_{anal} が本来持っている特有の性質を \mathbf{K}_{num} が満たすように、 \mathbf{K}_{num} を修正することを提案する。そこで、まず、本節では \mathbf{K}_{anal} の性質について述べる。

2.1. 剛体運動と接線剛性マトリクスとの関係

一般に、解析的に求めた接線剛性マトリクス \mathbf{K}_{anal} は材料剛性 \mathbf{K}_{anal}^M と幾何剛性 \mathbf{K}_{anal}^G の和となる（これら3つのマトリクスは全て対称である）。

$$\mathbf{K}_{anal} = \mathbf{K}_{anal}^M + \mathbf{K}_{anal}^G \quad (2)$$

一般に、各荷重ステップにおけるニュートン反復の変位増分は、弾性変位 $\Delta \mathbf{d}$ と剛体変位 $\Delta \mathbf{r}$ の和となる[1]。

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{d} + \Delta \mathbf{r}, \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha} \quad (3)$$

ただし、 \mathbf{R} は剛体モードを表すマトリクスであり、 $\Delta \boldsymbol{\alpha}^i$ は剛体モード変位である。ここで、剛体モード \mathbf{R} は並進モードと回転モードとに分けられる。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{tran} & \mathbf{R}_{rot} \end{bmatrix} \quad (4)$$

剛体変位に対しては、応力は発生しないので、線形項 \mathbf{K}_{anal}^M は剛体変位 \mathbf{R} と直交する。しかし、非線形構造解析の特徴は、非線形項 \mathbf{K}_{anal}^G が回転変位 \mathbf{R}_{rot} と直交しないことにある。すなわち、

$$\mathbf{K}_{anal}^M \cdot \mathbf{R} = \mathbf{K}_{anal}^M \cdot \mathbf{K}_{anal}^M \cdot \mathbf{R}_{tran} = \mathbf{K}_{anal}^M \cdot \mathbf{R}_{rot} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R}_{tran} = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R} = \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R}_{rot} \neq \mathbf{0} \quad (7)$$

各ニュートン反復での残渣ベクトルを $\boldsymbol{\phi}$ とすれば、

$$\mathbf{K}_{anal} \cdot \Delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \quad (8)$$

となるが、これに式(2)~(6)を代入すると、次式を得る。

$$\mathbf{K}_{anal}^M \cdot \Delta \mathbf{d} + \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \Delta \mathbf{d} + \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R}_{rot} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\phi} \quad (9)$$

$$\mathbf{R}_{rot}^T \cdot \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \Delta \mathbf{d} + \mathbf{R}_{rot}^T \cdot \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R}_{rot} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_{rot}^T \cdot \boldsymbol{\phi} \quad (10)$$

式(10)を用いて $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ を消去し、(9)を用いて(9)を整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{anal}^M \cdot \Delta \mathbf{d} + (\mathbf{K}_{anal}^G - \mathbf{K}_{anal}^S) \cdot \Delta \mathbf{d} \\ & = \boldsymbol{\phi} - \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R}_{rot} (\mathbf{R}_{rot}^T \cdot \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R}_{rot})^{-1} \cdot \mathbf{R}_{rot}^T \cdot \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 \mathbf{K}_{anal}^S は次式で定義される。

$$\mathbf{K}_{anal}^S \equiv \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R}_{rot} (\mathbf{R}_{rot}^T \cdot \mathbf{K}_{anal}^G \cdot \mathbf{R}_{rot})^{-1} \cdot \mathbf{R}_{rot}^T \cdot \mathbf{K}_{anal}^G \quad (12)$$

\mathbf{K}_{anal}^S は、梁の場合で言えば、いわゆる string stiffness[2]（応力負荷状態における剛体回転方向の剛性マトリクス

ス)であり, 簡単な計算から, \mathbf{R}_{tran} と直交することがわかる. また, 幾何剛性 \mathbf{K}_{anal}^G から \mathbf{K}_{anal}^S を差し引くと, 剛体変位 \mathbf{R} と直交することがわかる.

$$\mathbf{K}_{anal}^S \cdot \mathbf{R}_{tran} = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$(\mathbf{K}_{anal}^G - \mathbf{K}_{anal}^S) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (14)$$

以上の性質を踏まえ, 次節では接線剛性マトリクスを不変とする射影マトリクスを導入する.

2.2. 射影マトリクス

次式で定義される射影マトリクス \mathbf{P}_r を導入する[2].

$$\mathbf{P}_r \equiv \mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \quad (15)$$

(ただし, \mathbf{I} は単位マトリクス). 式(3)より, \mathbf{P}_r は変位 $\Delta \mathbf{u}$ から弾性変位分 $\Delta \mathbf{d}$ を抽出することがわかる.

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{P}_r \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (16)$$

また, 式(14)より, 次式が成り立つこと.

$$\mathbf{P}_r^T \cdot \mathbf{K}_{anal}^M \cdot \mathbf{P}_r = \mathbf{K}_{anal}^M \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_r^T \cdot (\mathbf{K}_{anal}^G - \mathbf{K}_{anal}^S) \cdot \mathbf{P}_r = \mathbf{K}_{anal}^G - \mathbf{K}_{anal}^S \quad (18)$$

これらの関係から, 次式が成り立つことがわかる.

$$[\mathbf{P}_r^T \cdot (\mathbf{K}_{anal}^G - \mathbf{K}_{anal}^S) \cdot \mathbf{P}_r + \mathbf{K}_{anal}^M] \cdot \Delta \mathbf{u} = \phi \quad (19)$$

式(17)と(18)は, それぞれ, \mathbf{K}_{anal}^M , $\mathbf{K}_{anal}^G - \mathbf{K}_{anal}^S$ が剛体変位によって発生させない, すなわち, 自己平衡が成立しているという条件を, 射影行列 \mathbf{P}_r を用いて表現したものである. そして, 式(19)の左辺のマトリクス

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{P}_r^T \cdot (\mathbf{K}_{anal}^G - \mathbf{K}_{anal}^S) \cdot \mathbf{P}_r + \mathbf{K}_{anal}^M \quad (20)$$

は, その条件を満たす, すなわち, 自己平衡を満たす接線剛性マトリクスであることを意味している.

3. 数値的に生成された接線剛性マトリクス

接線剛性マトリクス \mathbf{K}_{num} は節点力ベクトル \mathbf{f} から次式で数値的に求めることができる.

$$\mathbf{K}_{num} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\varepsilon_{num}}, \quad \delta \mathbf{u} = \varepsilon_{num} \mathbf{a} \quad (21)$$

ただし, ε_{num} は計算機精度を考慮した微小量であり, \mathbf{a} は各節点変位 (一般化座標) 方向の単位ベクトルである. これを用いて,

$$\mathbf{K}_{num} \cdot \Delta \mathbf{u} = \phi \quad (22)$$

によりニュートン反復を繰り返すと, \mathbf{K}_{num} の誤差が原因で計算が不安定になる場合がある. そこで, 本研究では, 前節の結果を用い, 式(24)で定義されるマトリクス \mathbf{K}_{obj} を接線剛性マトリクスとして,

$$\mathbf{K}_{obj} \cdot \Delta \mathbf{u} = \phi \quad (23)$$

によりニュートン反復を行うことを提案する.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{obj} &= \mathbf{K}^m + \mathbf{K}^S \\ \mathbf{K}^S &= \mathbf{K}_{num} \cdot \mathbf{R}_r (\mathbf{R}_r^T \cdot \mathbf{K}_{num} \cdot \mathbf{R}_r)^{-1} \cdot \mathbf{R}_r^T \cdot \mathbf{K}_{num} \\ \mathbf{K}_m &= \mathbf{P}_r \cdot (\mathbf{K}_{num} - \mathbf{K}^m) \cdot \mathbf{P}_r \end{aligned} \quad (24)$$

そもそも, \mathbf{K}_{num} を用いた場合に数値不安定が起こるのは, 本来, 応力を発生させないはずの剛体変位増分が

応力を発生させてしまうことに起因すると考えられる. \mathbf{K}_{obj} を用いれば, 剛体変位増分により応力が発生することがないので, 数値不安定は起らないと考えられる. これが, 本研究のポイントである.

なお, 実際の計算では, 全体接線剛性マトリクスにこの操作を行うのではなく, 各有限要素においてこれらを計算して要素接線剛性マトリクスを求め, それを重ね合わせて全体接線剛性マトリクスを算出する.

4. 数値計算例

本節では, 前節で提案した数値接線剛性マトリクス \mathbf{K}_{obj} の有効性を示すため, 二つの数値計算例を示す.

4.1. 定分布荷重を受ける片持ち梁

長さ L , 幅 W , 高さ H の, 単位体積当たり ρg だけの重力を受ける片持ち梁を考える (Fig.1). ただし, $L = 0.3$, $W = 0.01$, $H = 0.01$ である. この梁を 8 節点六面体要素で $30 \times 4 \times 1$ 分割して解析した. 材料は等方性とし, ポアソン比は 0.3 とした.

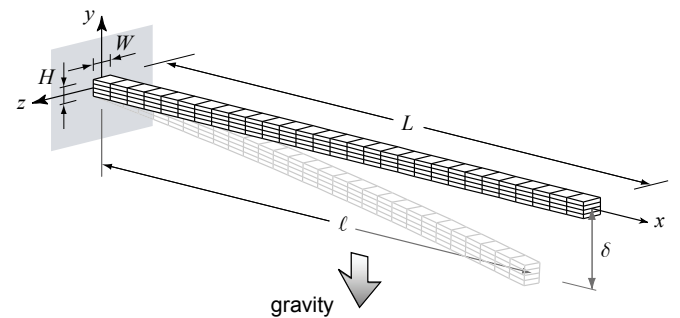


Fig.1 Cantilever beam with gravity loading

8 節点六面体要素においては, 一つ前の荷重ステップでの節点位置ベクトルを \mathbf{x}_n として, 要素の中心位置 \mathbf{x}_c を

$$\mathbf{x}_c = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^8 \mathbf{x}_n \quad (25)$$

と定義し, 剛体モード \mathbf{R} を次式で与えた.

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{R}_8] \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_n \equiv [\mathbf{I} \quad \widehat{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_c}] \quad (27)$$

ただし, 上付きのハットは外積を表す三行三列の反対称マトリクスを意味する.

この例題では, 次の無次元荷重パラメータ k を導入し, 荷重ステップ幅を $\Delta k = 1$ として計算した.

$$k \equiv \frac{\rho g A L^3}{EI} \quad (28)$$

ただし, $A = HW$ は梁の断面積, $I = WH^3 / 12$ は断面二次モーメントである. また, この例では $\varepsilon_{num} = 1.0 \times 10^{-10}$ として計算した.

\mathbf{K}_{obj} を用いて計算した変形形状を Fig.2 に示す. 荷重が大きくなると, たわみだけでなく伸びも大きくなってゆく. Fig.3 は梁先端の位置 (l, δ) の変化をプロットしたものである (l と δ の定義は Fig.1 の通り). 比較のため, 伸張エラスティカの解析解を実線で示しており,

提案する方法で精度よく計算できていることがわかる。

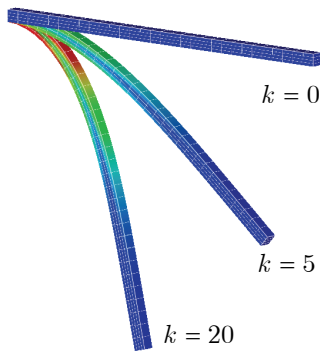


Fig.2 Deformation under gravity loading

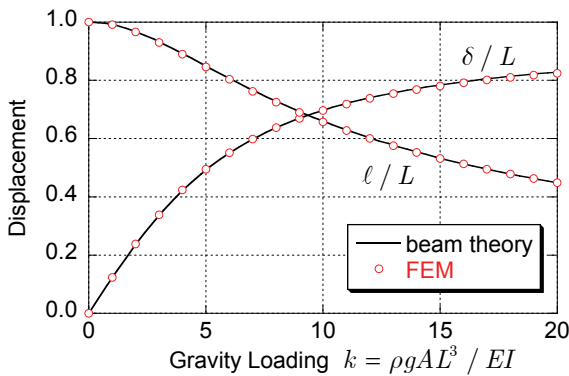


Fig.3 Displacement of tip of beam under gravity

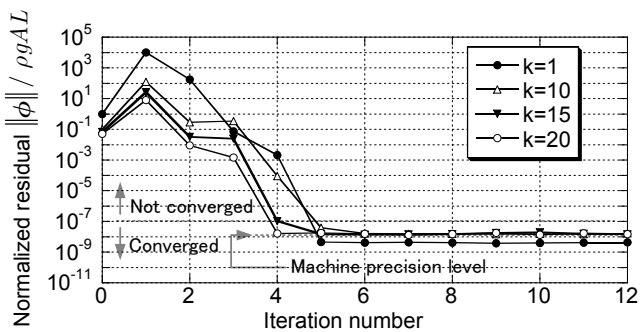
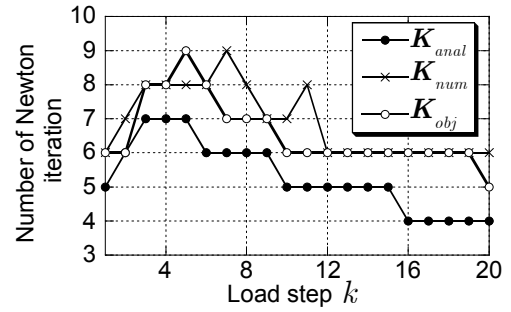


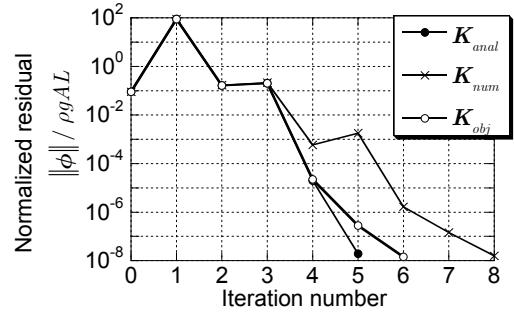
Fig.4 Estimation of machine precision

Fig.4は縦軸に無次元化した残渣力ノルムを、横軸に K_{anal} でのニュートン反復数をとって計算機精度を確認したものである。このグラフからわかる通り、用いた計算機の精度は無次元残渣力ノルムが 10^{-8} のレベルにあることがわかる。そこで、以下に示す例では、ニュートン反復の収束条件を 10^{-7} とし計算している。

Fig.5(a)は各荷重ステップにおけるニュートン反復数を、 K_{anal} 、 K_{num} 、 K_{obj} とで比較したものであり、本研究で提案する K_{obj} は解析的に導出した K_{anal} に比べて反復数がやや多く、それは従来の K_{num} とほぼ同等のレベルである。ただし、 K_{num} より多くなることはない。また、荷重ステップによっては K_{num} よりも反復数が少なく、例えば、11ステップ目では、Fig.5(b)に示す通り、収束速度は K_{anal} とほぼ変わらない。逆に言えば、 K_{num} の場合には、その精度の悪さから、時として反復数が多くなることがあることを Fig.5(a)は示している。



(a) number of iteration



(b) residual error in 11th load step

Fig.5 Residual error in Newton iteration

4.2. 従動力を受ける片持ち梁

前節では重力という、一定方向の分布荷重を受ける梁の変形を考えたが、この節では、接線剛性マトリクスの精度がより高く求められる、従動力（変形に依存して方向が変わる力）を受ける片持ち梁の変形を考える。ここでは、その例として、梁の上面に圧力 p が作用する場合の計算結果を示す。ただし、梁の諸元は前節のものと同じであり、ここでは、荷重パラメータを

$$k \equiv \frac{pWL^3}{EI} \quad (29)$$

として、荷重ステップ幅を $\Delta k = 1$ とし計算した。

Fig.6に梁の変形形状を、Fig.7に梁先端の変位の変化を示す。これらの通り、計算は適切に行われている。

Fig.8(a)は必要なニュートン反復回数を表している。このグラフからわかる通り、提案する K_{obj} では適切に収束しているが、従来の K_{num} では荷重ステップが大きくなると、極端に収束性が悪くなる。Fig.8(b)は20ステップ目での反復回数と無次元残渣力ノルムとの関係を表しており、 K_{num} の収束性の悪さが際立っている。この例題では、圧力の方向は変位に依存するので、接線剛性マトリクスには圧力に依存する項が現れる。ここでは、あえて、 K_{anal} だけでなく、 K_{num} 、 K_{obj} の計算の際にも、この圧力項の計算には解析的に導いた式を用いている（数値微分は用いていない）。にも関わらず、 K_{num} と K_{obj} との間にはこれだけの差異が現れており、これは、両者の特性、すなわち、 K_{num} が自己平衡を満たしておらず、 K_{obj} が満たしている、という特性そのものによる結果と言える。このように、ほんのわずかな誤差が収束性に大きな影響を及ぼしている。

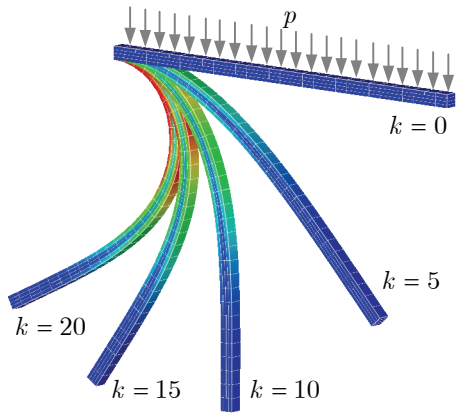


Fig.6 Deformation under pressure loading

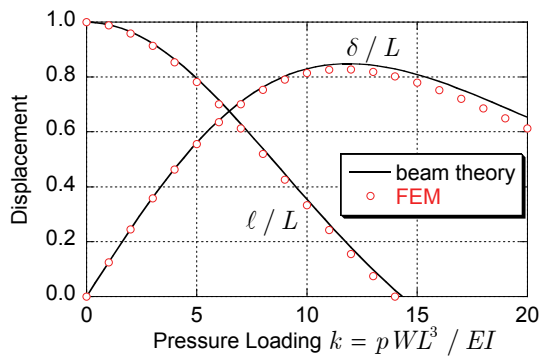
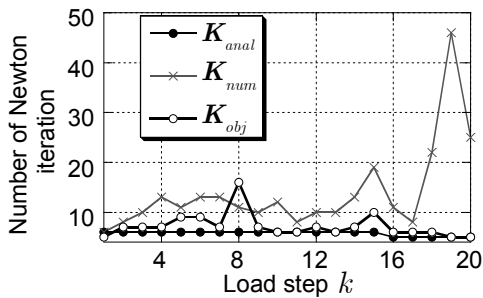
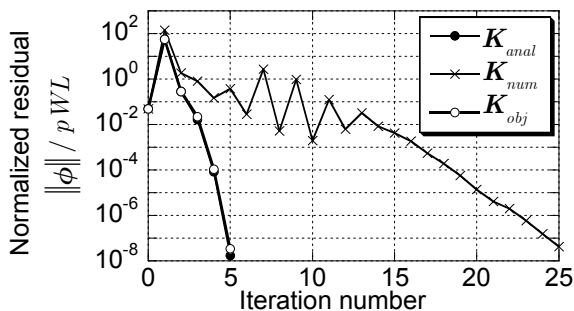


Fig.7 Displacement of tip of beam under pressure



(a) number of iteration



(b) residual error in 20th load step

Fig.8 Residual error in Newton iteration

さて、Fig.10 は、いくつかの荷重ステップにおける、 K_{anal} でのニュートン反復の際の反復回数とその都度の変位増分 Δu との関係を示したものである。このグラフから、 Δu を収束判定に用いる場合には、 $\|\Delta u\| < 10^{-11}$ とすればよいことがわかる。そこで、そうした場合の収束状況を調べたのが Fig.10 である。(a)は必要なニュー

トン反復数を表しており、 K_{num} では収束しないことがわかる。(b)は収束しなかった荷重ステップ $k=8$ のときの変位増分ノルム $\|\Delta u\|$ と反復数との関係を示しており、 K_{obj} が高速に収束するのに比べ、 K_{num} は全く収束する気配がないことがわかる。これは、 K_{num} がランク落ちに近い状態に陥っていることを意味している。

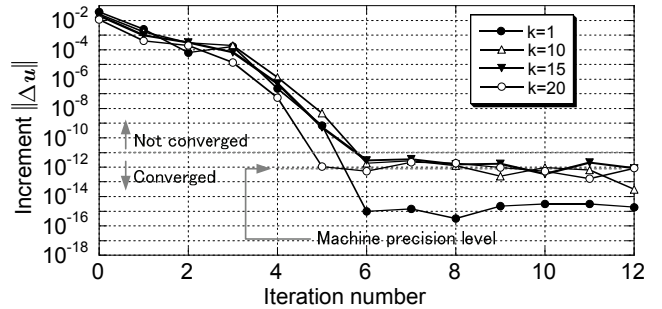
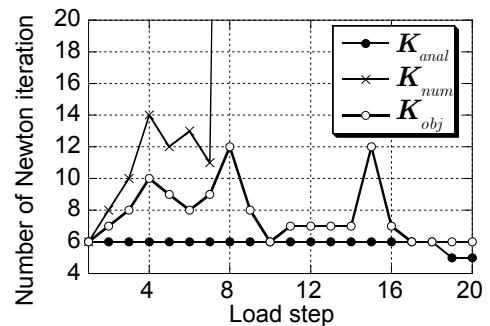
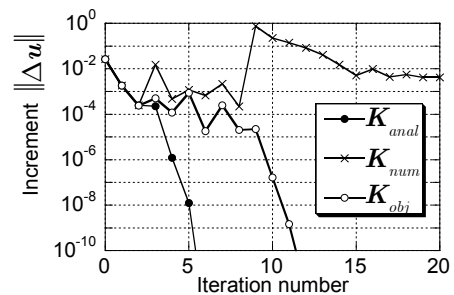


Fig.9 Estimation of machine precision



(a) number of iteration



(b) residual error in 8th load step

Fig.10 Residual error in Newton iteration

5. 結論

差分近似により数値的に求めた接線剛性マトリクスを修正し、数値的に安定に収束解を求める方法を提案し、数値例により、その有効性を示した。

6. 参考文献

- [1] Felippa, C.A., and Park, K.C., A Direct Flexibility Method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 149 (1997) 319-337.
- [2] Lee, Y., and Park, K.C., Numerically generated tangent stiffness matrix for nonlinear structural analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191 (2002) 5833-5846.